Unique ergodicité quantique p-adique

I. Le cas réel

L'un des principes phares du chaos quantique est que les fonctions propres du laplacien sur une variété Riemannienne compacte de courbure strictement négative Y deviennent, dans la limite de haute fréquence, délocalisées en espace-phase. L'expression la plus concrète de ce phénomène est le théorème d'ergodicité quantique de Schnirelman–Colin de Verdière–Zelditch [3, 10, 14]. Ce résultat célèbre affirme que, sur une variété Y dont le flot géodésique est ergodique, la masse-L^2 de presque toute fonction propre (ou bien son relèvement microlocal sur le fibré tangent unitaire $X \to Y$) dans une base orthonormée s'équirépartit lorsque la valeur propre tend vers l'infini. C'est un reflet quantique du fait classique que, sous l'hypothèse d'ergodicité, presque toute géodésique s'équirépartit.

L'une des conjectures motrices de ce domain est celle de Rudnick et Sarnak [7], appelée *l'unique ergodicité quantique*, selon laquelle en courbure strictement négative *toute fonction propre* (sans exception) dans une base orthonormée équirépartit sa masse-L^2 dans la limite de haute fréquence. Cette conjecture est largement ouverte aujourd'hui, malgré d'importants progrès par Anantharaman [1] et Dyatlov–Jin [4].

La percée de Lindenstrauss

Dans le cas des surfaces hyperboliques compactes de congruences, une percée spectaculaire a été faite par Lindenstrauss [5] il y a une vingtaine d'années, dans un travail qui lui a en partie valu la médaille Fields. Dans ce cadre spécial, Lindenstrauss a montré qu'une certaine classe de fonctions propres $\mathcal{F}$, définies de manière *arithmétique*, vérifient bien la conjecture d'unique ergodicité quantique.

Les surfaces considérées par Lindenstrauss sont construites de la manière suivante. Soit $\mathbf{B}$ une algèbre de quaternions à division sur $\mathbb{Q}$, supposée indéfinie; ainsi $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ est isomorphe à l'algèbre déployée $M_2(\mathbb{R})$. Soit $\mathbf{G}$ le groupe des unités projectives de $\mathbf{B}$. Soit R un ordre d'Eichler de $\mathbf{B}(\mathbb{Q})$. Alors les unités projectives de R définissent un réseau arithmétique $\Gamma_{(\infty)}$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) = \mathbf{G}(\mathbb{R})$. Si $\mathbb{H}_{(\infty)} = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{PO}(2)$ désigne le demi-plan de Poincaré, le quotient $Y_{(\infty)} = \Gamma_{(\infty)}\backslash\mathbb{H}_{(\infty)}$ est une surface hyperbolique compacte, dont le fibré tangent unitaire s'identifie au quotient $X_{(\infty)} = \Gamma_{(\infty)}\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$.

Les fonctions dans $\mathcal{F}$, par définition, respectent les symétries supplémentaires sous-jacentes sur $Y_{(\infty)}$: elle sont à la fois propres pour le laplacien hyperbolique et pour les opérateurs de Hecke T_ℓ, pour tout $\ell \notin \mathrm{Ram}(\mathbf{B})$ où l'ordre local $R_\ell = R \otimes \mathbb{Z}_\ell \subset M_2(\mathbb{Q}_\ell)$ est maximal. À chaque $\varphi \in \mathcal{F}$ on définit une mesure de probabilité μ_φ sur $Y_{(\infty)}$ qui envoie $\Phi \in C(Y_{(\infty)})$ à $\mu_\varphi(\Phi) = \langle \varphi\Phi, \varphi \rangle$. Une procédure de microlocalisation due à Zelditch et Wolpert [13, 14] relève μ_φ en une mesure $\tilde{\mu}_\varphi$ sur $X_{(\infty)}$.

Lindenstrauss montre alors que seule la mesure de Haar sur $X_{(\infty)}$ est atteinte comme limite faible des $\tilde{\mu}_\varphi$ ($\varphi \in \mathcal{F}$), ce qui implique l'unique ergodicité quantique arithmétique sur $Y_{(\infty)}$. Un ingrédient important dans sa preuve est un théorème de rigidité pour les mesures de probabilité A-invariantes, où A est le tore diagonal de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$. Ce dernier théorème (dû encore à Lindenstrauss) caractérise la mesure de Haar parmis les mesures de probabilité A-invariantes et Hecke récurrentes sur $X_{(\infty)}$, dont presque toute composante ergodique est d'entropie positive par rapport à A.

Raffinements et généralisations

Le travail de Lindenstrauss a été renforcé et étendu dans plusieurs aspects :

(1) Brooks et Lindenstrauss [2] ont affaibli les conditions sur les fonctions $\varphi \in \mathcal{F}$: elles ne doivent être propres que pour le laplacien hyperbolique et pour *un seul* opérateur de Hecke T_ℓ ;

(2) Shem-Tov et Silberman [9] ont étendu la méthode et la preuve de Lindenstrauss à toute variété arithmétique associée à une algèbre de quaternions à division $\mathbf{B}$ totalement indéfinie sur un corps de nombres ;

(3) Silberman et Venkatesh [11, 12] ont étendu la méthode et la preuve de Lindenstrauss à toute variété arithmétique associée à une algèbre centrale simple à division, $\mathbb{R}$-déployée, et de degré premier, tels les quotients compacts de $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{R})$ avec d premier ;

(4) Shem-Tov [8] a affaibli les conditions de Silberman–Venkatesh afin de n'utiliser qu'un seul opérateur de Hecke T_ℓ, à la Brooks–Lindenstrauss.

II. Le cas p-adique

Récemment, Nelson [6] a proposé, et démontré, un analogue p-adique de la conjecture d'unique ergodicité quantique arithmétique pour les quotients de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dans la discussion qui suit, on fixera un nombre premier p, qui jouera le rôle de la place archimédienne ∞ dans le cadre de Lindenstrauss.

L'espace (ou les espaces, au pluriel)

On commence d'abord par définir l'espace sur lequel on posera la question d'équirépartition de masse. Il se révélera que le cadre p-adique impose une variation en l'espace plutôt qu'en la valeur propre.

Soit $\mathbf{B}$ une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ qui, cette fois-ci, est *définie*. Ainsi, si $\mathbf{G}$ désigne de nouveau les unités projectives de $\mathbf{B}$, le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = \mathrm{PU}(2)$ est compact. On suppose par ailleurs $\mathbf{B}$ non ramifiée en p, de sorte que $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Comme précédemment, on fixe un ordre d'Eichler R de $\mathbf{B}(\mathbb{Q})$. Alors les unités projectives $\mathbb{Z}_p[1/p]^\times \backslash R[1/p]^\times$ définissent un réseau $\Gamma_{(p)}$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le quotient $Y_{(p)} = \Gamma_{(p)} \backslash \mathbb{H}_{(p)}$, où $\mathbb{H}_{(p)} = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est l'arbre $p+1$-régulier, est muni d'une structure de graphe fini $p+1$-régulier, par les relations d'adjacence déterminées par l'opérateur de Hecke T_p. Le graphe $Y_{(p)}$ jouera le rôle de la surface hyperbolique arithmétique compacte $Y_{(\infty)}$.

Par contraste au cadre réel, l'espace hilbertien $L^2(Y_{(p)})$ est de dimension finie, ce qui signifie que la limite par rapport à la fréquence n'a plus de ce sens ici. Néanmoins, l'analogue du fibré tangent unitaire possède une structure très riche dans ce cadre p-adique, étant approximé par la limite inverse des *espaces des chemins de longueur* $2N+1$. On désignera par

$$Y_{(p)}(N) = \{x_{-N} \to \cdots \to x_{-1} \to x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_N : x_i \in Y_{(p)}\}$$

cet espace, muni de la projection naturelle $Y_{(p)}(N) \to Y_{(p)}$ qui envoie un chemin à son mi-point x_0.

Nelson s'intéresse donc à la répartition de la masse-L^2 d'une certaine classe $\mathcal{F}_N$ de fonctions propres sur $Y_{(p)}(N)$, décrites ci-dessous, dans la limite $N \to \infty$.

Les fonctions propres

Pour définir les fonctions dans $\mathcal{F}_N$, on remarque d'abord que $Y_{(p)}(N)$ s'identifie au quotient $\Gamma_{(p)} \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)/K_N$, où K_N est le sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ donné par l'image projective de $\left\{\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^N\mathbb{Z}_p \\ p^N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}\right\} \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Puisque $\bigcap_N K_N = A(\mathbb{Z}_p)$, les espaces $Y_{(p)}(N)$ convergent vers $X_{(p)}/A(\mathbb{Z}_p)$, où

$$X_{(p)} = \Gamma_{(p)} \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

Pour profiter des symétries arithmétiques de $Y_{(p)}(N)$, une fonction dans $\mathcal{F}_N$ sera supposée propre pour tous les opérateurs de Hecke T_ℓ, avec $\ell \notin \mathrm{Ram}(\mathbf{B})$ distinct de p. Par ailleurs, on demandera que le tiré en arrière le long de $X_{(p)} \to Y_{(p)}(N)$ engendre une représentation irréductible dans la série principale de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$, tout comme les fonctions propres du laplacien sur $Y_{(\infty)}$. Ces hypothèses mettent en parallèle les deux cadres : p-adiques et réels.

Énoncé

Dans son article [6], Nelson tire partie de ses propres dernières avancés dans la théorie microlocale des formes automorphes, pour définir des *relèvements microlocaux p-adiques* $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{F}}_N$ – fonctions définies sur $X_{(p)}$ – des $\varphi \in \mathcal{F}_N$. Grâce à la théorie des représentations et les formules de produits triples locaux, il démontre que les mesures semi-classiques $\mu_{\tilde{\varphi}}$ associées à ces relèvements microlocaux possèdent de bonnes propriétés : l'invariance par $A(\mathbb{Q}_p)$ dans la limite, l'équivariance par les T_ℓ, l'approximation des μ_φ par les $\mu_{\tilde{\varphi}}$. Cette construction remplace celle de Zelditch et Wolpert dans le cas réel. Finalement, Nelson suit en grande partie la stratégie de Lindenstrauss pour montrer que seule la mesure Haar est limite faible d'une suite des mesures $\mu_{\tilde{\varphi}}$ sur $X_{(p)}$, lorsque $N \to \infty$.

III. Le projet

La tâche centrale de cette thèse est de mettre sur le même pied d'égalité les extensions et raffinements de l'unique ergodicité quantique arithmétique apportés au cas réel, après la percée initiale de Lindenstrauss, au cadre p-adique récemment développé par Nelson.

Le premier projet serait d'adapter les méthodes de Brooks–Lindenstrauss au cadre p-adique, en montrant que les hypothèses de Nelson sur la famille $\mathcal{F}_N$ peuvent être prises moins contraignantes : une fonction φ serait désormais propre d'un seul opérateur de Hecke T_ℓ, $\ell \neq p$ (tout en engendrant une représentation irréductible de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans la séries principale). D'ailleurs, on pourra demander que φ ne soit qu'un *quasi-mode* (proprement interprété) en ces deux places. Pour cela il faudrait établir la positivité de l'entropie par rapport à $A(\mathbb{Q}_p)$ de presque toute composante ergodique des mesures semiclassiques $\lim \mu_{\tilde{\varphi}}$ définies par Nelson. Or, dans la méthode de Lindenstrauss (adaptée par Nelson), cette positivité découle d'une majoration de la masse que $\mu_{\tilde{\varphi}}$ donne à un tube autour d'un segment de géodésique, borne obtenue en dispersant cette masse à l'aide des divers opérateurs de Hecke. Avec un seul T_ℓ, on est obligé de travailler plus directement avec l'entropie ergodique, à l'aide du théorème de Shannon–McMillan–Breiman qui relie l'entropie avec la taille exponentielle que la mesure donne aux raffinements d'une partition.

Le deuxième projet serait d'adapter les méthodes de Silberman–Venkatesh pour établir l'unique ergodicité quantique arithmétique aux quotients compacts $Y_{(p)} = \Gamma_{(p)} \backslash \mathcal{B}_{(p)}$ de l'immeuble de Bruhat–Tits $\mathcal{B}_{(p)} = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z}_p)$ (où $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p)$ avec d premier). Ici, la tâche principale serait de comprendre comment modéliser le fibré de la chambre de Weyl

$$X_{(p)} = \Gamma_{(p)} \backslash \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)/M(\mathbb{Z}_p) \to \Gamma_{(p)} \backslash \mathcal{B}_{(p)} = Y_{(p)}$$

où M est le normalisateur de A de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z}_p)$, par des espaces intermédiaires

$$Y_{(p)}(N) = \Gamma_{(p)} \backslash \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)/K_N,$$

pour un choix convenable de sous-groupes compacts ouverts de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z}_p)$, toute comme dans l'approche de Nelson. Pour profiter de la théorie des formes nouvelles qui existe encore dans ce cadre, les sous-groupes K_N devraient être pris tous conjugués des sous-groupes de Hecke classiques $K_0(N)$. Il faudrait ensuite développer une notion de relèvement microlocal à $X_{(p)}$ pour les fonctions sur ces espaces $Y_{(p)}(N)$ et établir les bonne propriétés. Certaines étapes dans l'article de Nelson, qui utilisent la formule de produits triples locaux, n'auront pas d'analogue ici et il faudrait trouver des arguments plus directs.

References

[1] N. Anantharaman, Entropy and the localization of eigenfunctions, Ann. of Math. (2), t. 168 (2008), no. 2, pp. 435–475.

[2] S. Brooks, E. Lindenstrauss, Joint quasimodes, positive entropy, and quantum unique ergodicity, Invent. Math. 198 (2014), 219–259.

[3] Y. Colin de Verdiere, Ergodicite et fonctions propres du laplacien, Comm. Math. Phys., 102(3):497502, 1985.

[4] S. Dyatlov, L. Jin, Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support, Acta Math., t. 220 (2018), no. 2, pp. 297–339.

[5] E. Lindenstrauss, Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity, Ann. of Math. 163 (2006), 165–219.

[6] P. Nelson, Microlocal lifts and quantum unique ergodicity on $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Algebra & Number Theory (2016).

[7] Z. Rudnick Z, P. Sarnak, The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds Comm. Math. Phys.161 (1994), 195–213.

[8] Z. Shem-Tov, Positive entropy using Hecke operators at a single place, IMRN (2020).

[9] Z. Shem-Tov and L. Silberman, Arithmetic quantum unique ergodicity for products of hyperbolic 2- and 3-spaces, https://arxiv.org/abs/2206.05955

[10] A. I. Shnirelman, Ergodic properties of eigenfunctions, Uspekhi Mat. Nauk. 180 (1974), 181–182.

[11] L. Silberman, A. Venkatesh A, On quantum unique ergodicity for locally symmetric spaces, Geom. Funct. Anal. 17 (2007), 960–998.

[12] L. Silberman, A. Venkatesh, Entropy bounds and quantum unique ergod- icity for Hecke eigenfunctions on division algebras, Probabilistic methods in geometry, topology and spectral theory, 171197, Contemp. Math., 739, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019.

[13] Scott A. Wolpert, Semiclassical limits for the hyperbolic plane, Duke Math. J. 108 (2001), no. 3, 449–509.

[14] S. Zelditch, Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces, Duke Math. J., t. 55 (1987), no. 4, pp. 919–941.

Farrell Brumley
Maître de Conférences (HDR)
Université Sorbonne Paris Nord

Nicole Raulf
Maître de Conférences (HDR)
Université de Lille

N. Raulf

Didier Lesesvre
Maître de Conférences
Université de Lille